

РЕЗЮМЕ

В статье обсуждаются некоторые методы оценивания в моделировании структуральных уравнений и их свойств. Затем проводится попытка разработки шкалы для измерения обеспечения себя на старость домашних хозяйств с использованием моделирования структуральных уравнений. При выборе метода оценивания прежде всего имели значение свойства отдельных методов, учитывались также результаты симуляционных обследований по степени устойчивости отдельных методов к отклонениям от нормального распределения, размер выборки, ошибочную специфику модели и т.п. Рассматривались две измерительные модели: предусматривающие существование одного совместного фактора и трех совместных факторов.

С целью проверки предложенных моделей проводился подтверждающий факторный анализ. Кроме того сопоставлены оценки полученные методом максимального правдоподобия (ML) и обобщенным методом наименьших квадратов (GLS), которые в случае правильной спецификации модели должны давать симптоматические сходные результаты.

Bogusław GUZIK¹

Efektywność w standardowym modelu CCR-DEA przy zmianach rozmiaru zadania

Osoby zajmujące się zastosowaniem metod DEA (*Data Envelopment Analysis*) do badania efektywności obiektów gospodarczych lub społecznych często stoją przed pytaniami, czy dla prowadzonej analizy korzystne jest wzięcie dużej czy raczej mniejszej liczby nakładów/rezultatów, a także, czy korzystne jest badanie efektywności na tle dużej czy raczej mniejszej liczby obiektów? Na te pytania statystyczne odpowiadać można z różnych punktów widzenia, jednorodności danych czy minimalizacji kosztów badania i wysiłku. Dla uzyskania danych na ogół lepiej jest, gdy zbiór obiektów jest mniejszy. Z punktu widzenia wszechstronności analizy raczej lepiej jest, gdy obiektów jest więcej.

W artykule spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, jak zmienia się efektywność obiektów, gdy w modelu DEA zmienia się liczba nakładów/rezultatów oraz gdy

¹ Prof. dr hab. Bogusław Guzik pracował w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, zmarł w lipcu br.

zmienia się liczba obiektów. Wnioski z takiej analizy pozwolą uświadomić sobie, jakiego rodzaju wyniki można uzyskać, gdy np. powiększa się liczbę badanych obiektów lub rozpatrywanych nakładów/rezultatów. W ekonometrii też sobie stawiamy takie pytania. Wiadomo np., że o ile liczba stopni swobody jest nieujemna, to skutkiem zwiększenia liczby zmiennych objaśniających jest, *ceteris paribus*, spadek lub stabilizacja sumy kwadratów reszt oraz wzrost lub stabilizacja współczynnika determinacji.

Przedmiotem rozważań w artykule będzie standardowy model CCR ukierunkowany na nakłady.

STANDARDOWY MODEL CCR UKIERUNKOWANY NA NAKŁADY

Standardowy model CCR² jest powszechnie znany osobom zajmującym się DEA. Niemniej w celu ustalenia uwagi i podkreślenia faktów, które będą potrzebne w dowodach odpowiednich twierdzeń, dobrze będzie go przytoczyć. Jak wiadomo model CCR konstruowany jest oddzielnie dla każdego obiektu $o = 1, \dots, J$. Model dla obiektu o -tego formułujemy następująco:

Dane:

- lista obiektów $j = 1, \dots, J$,
- badany obiekt o ($1 \leq o \leq J$),
- lista nakładów X_n ($n = 1, \dots, N$) oraz lista rezultatów Y_r ($r = 1, \dots, R$),
- wielkości nakładów (x_{nj}) oraz rezultatów (y_{rj}) w poszczególnych obiektach ($j = 1, \dots, J$; $r = 1, \dots, R$; $n = 1, \dots, N$);

Zmienne decyzyjne:

- θ_o — mnożnik nakładów obiektu o -tego,
- $\lambda_{o1}, \lambda_{o2}, \dots, \lambda_{oJ}$ — wagi intensywności w technologii optymalnej obiektu o -tego;

Funkcja celu:

$$\theta_o \rightarrow \min \tag{1}$$

Warunki ograniczające:

$$\sum_{j=1}^J x_{nj} \lambda_{oj} \leq \theta_o x_{no} \quad (\text{dla } n = 1, \dots, N) \tag{2}$$

² Charnes, Cooper, Rhodes (1978).

$$\sum_{j=1}^J y_{rj} \lambda_{oj} \geq y_{ro} \quad (\text{dla } r = 1, \dots, R) \quad (3)$$

$$\theta_o \leq 1 \quad (4)$$

$$\theta_o, \lambda_{o1}, \lambda_{o2}, \dots, \lambda_{oJ} \geq 0 \quad (5)$$

Model CCR jest zadaniem programowania liniowego. Jego celem jest ustalenie mnożnika nakładów obiektu o -tego oraz wag intensywności $\lambda_{o1}, \dots, \lambda_{oJ}$, określających taką technologię optymalną obiektu o -tego, która pozwala osiągnąć rezultaty przynajmniej takie, jakie uzyskał obiekt o -ty — warunek (3) — przy nakładach stanowiących możliwie najmniejszą część nakładów obiektu o -tego — funkcja celu (1) w powiązaniu z warunkiem (2) oraz (4). Lewe strony warunków (2) oraz (3) określają odpowiednio — optymalne nakłady oraz optymalne rezultaty w technologii optymalnej obiektu o -tego. Formalnie biorąc są to liniowe kombinacje nakładów/rezultatów obiektów $j = 1, \dots, J$. Wagą technologii obiektu j -tego w technologii optymalnej obiektu o -tego jest optymalna waga intensywności λ_{oj} . Oczywiście niektóre wagi intensywności mogą być zerowe.

Za wskaźnik efektywności obiektu o -tego uznaje się w DEA optymalny mnożnik nakładów tego obiektu $\tilde{\theta}_o$. Im jest on większy, tym efektywność obiektu jest większa. Taka interpretacja optymalnego mnożnika nakładów jest zrozumiała — coraz większe $\tilde{\theta}_o$ oznacza, że optymalna technologia obiektu wymaga coraz większej części nakładów empirycznych, czyli empiryczna technologia badanego obiektu jest coraz bliższa jego technologii optymalnej. W granicznym przypadku, gdy $\tilde{\theta}_o = 1$, technologia optymalna wymaga zastosowania 100% nakładów empirycznych obiektu. Oznacza to, że stosowana przez ten obiekt technologia empiryczna jest efektywna w 100%, a sam obiekt jest w pełni (w 100%) efektywny.

Choć zadanie CCR i prawie wszystkie inne zadania DEA z formalnego punktu widzenia są zadaniami decyzyjnymi, a metodologia DEA jest stosowana do badań operacyjnych, główny cel metod DEA jest opisowo-statystyczny. Chodzi bowiem, podobnie jak w statystyce, WAP czy analizie dyskryminacyjnej, o ustalenie charakterystyki obiektów (zwanym w DEA efektywnością) i o porządkowanie obiektów w sensie charakterystyki. Współczesna DEA raczej opisuje „stan” badanych obiektów niż cele, do których powinny one dążyć i ma raczej charakter opisowy niż normatywny.

W artykule wykorzystamy informacje podane w tabl. 1³.

³ Są to dane, które już wykorzystano we wcześniejszej pracy autora (2009) dotyczącej zmiany efektywności w przypadku typowych statystycznych przekształceń zmiennych: skalowania oraz przesunięcia oraz gdy między zmiennymi zachodzą silne związki korelacyjne. Dla umożliwienia porównań wyników, posługujemy się tymi samymi danymi empirycznymi.

TABL. 1. OBSERWACJE ZMIENNYCH

Zmienne	Obiekty															
	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	W10	W11	W12	W13	W14	W15	W16
Y_1	55,4	54,6	53,8	52,8	50,9	53,0	53,6	59,0	57,0	55,9	55,3	56,3	54,5	58,0	54,6	56,8
Y_2	132,5	177,3	184,8	260,7	33,6	280,6	248,9	278,8	79,4	171,9	250,2	431,6	43,4	350,4	358,2	144,7
X_1	67,5	50,9	32,7	116,1	41,0	66,0	16,3	23,4	61,4	72,4	65,0	72,8	47,7	31,9	34,0	66,8
X_2	35,2	27,2	34,0	23,2	37,5	33,2	44,6	23,0	23,1	37,7	37,8	33,7	26,6	20,0	29,1	32,6
X_3	75,4	63,0	76,5	66,9	89,7	85,5	68,1	71,9	70,5	69,8	66,5	75,1	69,2	61,8	61,3	62,3

Źródło: dane umowne.

WSKAŹNIK EFEKTYWNOŚCI A ZMIANA LICZBY NAKŁADÓW I REZULTATÓW

Przykład

Posługując się danymi z tabl. 1 obliczono, z pomocą ukierunkowanego na nakłady standardowego modelu CCR, efektywność obiektów W1—W16 przy sześciu wariantach listy nakładów i rezultatów:

wariant A: rezultaty — Y_2 nakłady — X_1	wariant D: rezultaty — Y_1, Y_2 nakłady — X_1
wariant B: rezultaty — Y_2 nakłady — X_1, X_2	wariant E: rezultaty — Y_1, Y_2 nakłady — X_1, X_2
wariant C: rezultaty — Y_2 nakłady — X_1, X_2, X_3	wariant F: rezultaty — Y_1, Y_2 nakłady — X_1, X_2, X_3

Wyniki przedstawiono w tabl. 2.

**TABL. 2. EFEKTYWNOŚĆ PRZY RÓŻNYCH WARIANTACH LISTY
NAKŁADÓW/REZULTATÓW**

Nr wariantu		A	B	C	D	E	F
Liczba nakładów i rezultatów		2	3	4	3	4	5
Nr obiektu	Nazwa obiektu	efektywność					
1	W1	0,215	0,215	0,301	0,543	0,543	0,783
2	W2	0,372	0,372	0,486	0,692	0,692	0,923
3	W3	0,310	0,470	0,481	0,546	0,646	0,790
4	W4	0,641	0,641	0,684	0,784	0,784	0,840
5	W5	0,051	0,070	0,071	0,468	0,521	0,627
6	W6	0,482	0,482	0,571	0,550	0,550	0,660
7	W7	0,319	1	1	0,414	1	1
8	W8	0,692	1	1	0,884	1	1
9	W9	0,196	0,196	0,198	0,851	0,851	0,862
10	W10	0,260	0,260	0,421	0,511	0,511	0,853
11	W11	0,378	0,378	0,644	0,504	0,504	0,886
12	W12	0,731	0,731	0,989	0,731	0,731	0,989
13	W13	0,093	0,093	0,109	0,707	0,707	0,840

**TABL. 2. EFEKTYWNOŚĆ PRZY RÓŻNYCH WARIANTACH LISTY
NAKLADÓW/REZULTATÓW (dok.)**

Nr wariantu		A	B	C	D	E	F
Liczba nakładów i rezultatów		2	3	4	3	4	5
Nr obiektu	Nazwa obiektu	efektywność					
14	W14	1	1	1	1	1	1
15	W15	0,703	0,910	1	0,703	0,910	1
16	W16	0,253	0,253	1	0,601	0,601	1
Minimum		0,051	0,070	0,071	0,414	0,504	0,627
Średnia		0,419	0,504	0,585	0,656	0,722	0,877
Odchylenie standardowe		0,265	0,333	0,334	0,166	0,183	0,119
Liczba obiektów o efektywności 1		1	3	5	1	3	5

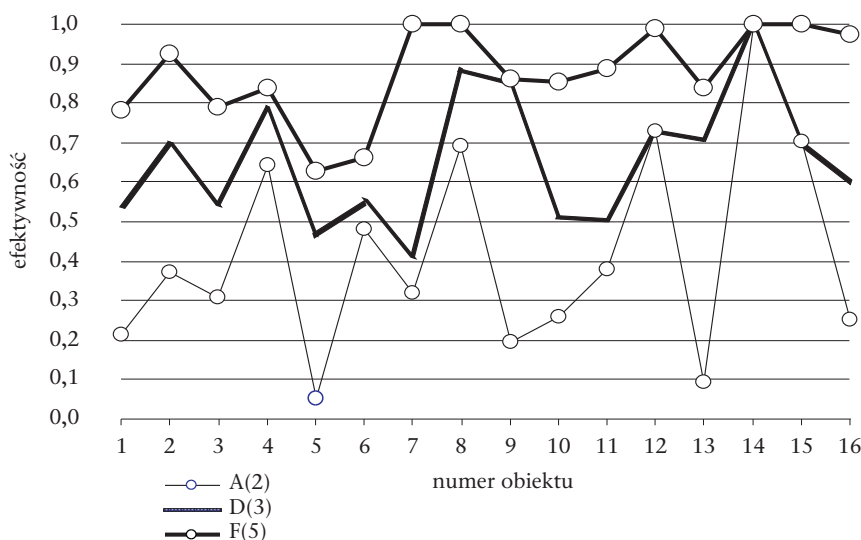
Ź r ó ł o: obliczenia własne.

Przykładowe wnioski z tabl. 2 są następujące:

- w miarę zwiększania liczby rezultatów wskaźnik efektywności danego obiektu zwykle rośnie, a ogólnie — nie maleje,
- podobna sytuacja ma miejsce w miarę zwiększania liczby rozpatrywanych nakładów.

Na wyk. 1 zilustrowano kształtowanie się wskaźników efektywności dla trzech wariantów — A, D oraz F. Liczba nakładów i rezultatów wynosiła dla nich odpowiednio 2, 3 oraz 5.

Wykr. 1. EFEKTYWNOŚĆ A LICZBA NAKŁADÓW/REZULTATÓW



Ź r ó ł o: obliczenia własne.

Na podstawie wykr. 1 można sformułować następujące wnioski empiryczne:

- im liczba nakładów/rezultatów jest większa, tym odpowiednia linia łamana przebiega wyżej (ogólnie — nie niżej) od poprzedniej, czyli efektywność obiektów zwykle rośnie, a ogólnie nie maleje;
- w miarę wzrostu liczby nakładów/rezultatów różnice efektywności pomiędzy obiektami generalnie stają się mniejsze;
- przy liście zawierającej tylko jeden nakład i jeden rezultat w pełni efektywny jest tylko jeden obiekt, zaś przy liście zawierającej więcej nakładów/rezultatów, obiektów w pełni efektywnych jest więcej.

Wnioski te dotyczą nie tylko naszego przykładu, ale mają charakter generalny.

W standardowym modelu CCR przy zwiększaniu liczby nakładów lub (i) rezultatów efektywność obiektu nie pogarsza się (rośnie lub się nie zmienia), natomiast przy zmniejszaniu tej liczby — efektywność obiektu nie polepsza się.

Dowód twierdzenia odwołuje się do własności zadań programowania liniowego:

- uwzględnienie nowego rezultatu (lub nakładu) oznacza, że do standardowego zadania CCR, określonego przez (1)—(5), wprowadza się dodatkowy warunek ograniczający, odpowiednio (2) lub (3), czyli:

$$\sum_{j=1}^J x_{nj} \lambda_{oj} \leq \theta_o x_{no} \text{ — warunek dla nakładu } n,$$

$$\sum_{j=1}^J y_{rj} \lambda_{oj} \geq y_{ro} \text{ — warunek dla rezultatu } r;$$

- zgodnie z ogólnymi własnościami zadań programowania liniowego, wprowadzenie dodatkowych warunków *nie polepsza* rozwiązania optymalnego:
 - a) jeśli wprowadzany warunek ograniczający okaże się wiążący, spowoduje to „wycięcie” fragmentu dotychczasowego zbioru rozwiązań dopuszczalnych, a w konsekwencji spowoduje *pogorszenie* rozwiązania optymalnego lub co najwyżej jego stabilizację⁴,
 - b) jeśli natomiast nowy warunek okaże się niewiązący, nie spowoduje to żadnej zmiany rozwiązania optymalnego;
- jak wiadomo, w ukierunkowanym na nakłady zadaniu CCR dokonuje się *minimalizacji* mnożnika θ . Dlatego pogorszenie rozwiązania optymalnego oznacza wzrost mnożnika θ , czyli wzrost wskaźnika efektywności.

Tak więc rzeczywiście przy wzroście liczby nakładów/rezultatów wskaźniki efektywności obliczane na podstawie modelu CCR rosną albo co najwyżej nie zmieniają się.

Podobnie można dowieść, że usunięcie warunku (dla nakładu lub rezultatu) wywoła spadek lub stabilizację wskaźnika θ .

⁴ Rozwiązanie optymalne się nie zmienia, gdy ów nowy warunek spełniony będzie w „starym” rozwiązaniu optymalnym.

Dodajmy, że analogicznie przebiegają dowody w wypadku zadania CCR ukierunkowanego na rezultaty — pogorszenie rozwiązania optymalnego oznacza spadek mnożnika rezultatów ϕ (gdyż jest on maksymalizowany), czyli oznacza wzrost efektywności, bo $\theta = 1/\phi$.

Przykład

Podajemy tu ilustrację geometryczną omówionego twierdzenia. Spośród opisanych w tabl. 1 obiektów weźmy pod uwagę dwa — pierwszy i piąty. Powiedzmy, że rozpatrujemy wariant B modelu CCR (jeden rezultat Y_2 , dwa nakłady X_1 oraz X_2). Wówczas ukierunkowane na nakłady zadanie CCR dla obiektu $W1$ ma postać (dla uproszczenia pominięto indeks obiektu — o):

$$\begin{array}{ll} (FC) & \theta \rightarrow \min \\ (Y_2) & 132,5\lambda_1 + 33,6\lambda_5 \geq 132,5 \\ (X_1) & 67,5\lambda_1 + 41,0\lambda_5 \leq 67,5\theta \\ (X_2) & 35,2\lambda_1 + 37,5\lambda_5 \leq 35,2\theta \\ (\text{theta}) & \theta \leq 1 \\ (\text{znaki}) & \lambda_1, \lambda_5, \theta \geq 0 \end{array}$$

Zadanie to można rozwiązać znaną z teorii programowania liniowego metodą geometryczną, gdyż mamy tylko dwie zmienne, mianowicie λ_1 oraz λ_5 . Na wykr. 2 przedstawiono rozwiązania dopuszczalne ze względu na warunek dla rezultatów (Y_2). Ograniczone są one od dołu przez linię ciągłą odpowiadającą równości dla Y_2 . Wykreślono też warunki dla nakładów X_1 oraz X_2 dotyczące sytuacji, gdy $\theta = 1$ (linie przerywane). Rozwiązywanie zadania polega na znalezieniu możliwie najmniejszego dopuszczalnego współczynnika θ . Zatem polega ono na proporcjonalnym (równoległym) — wraz ze zmniejszającym się współczynnikiem θ — przesuwaniu obu warunków dla nakładów X_1 oraz X_2 dla jak najniżej położonego punktu w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych, podobnie jak to się czyni w metodzie geometrycznej z izokwantą.

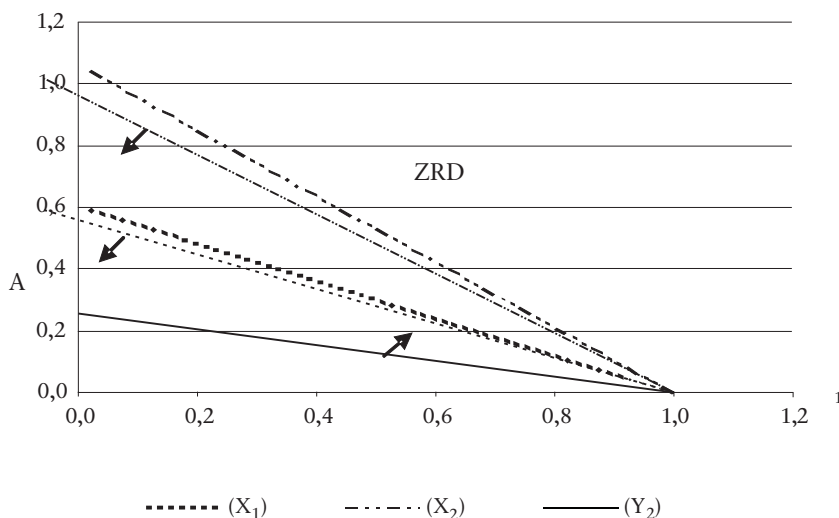
Rozwiązaniem zadania jest punkt **A** o współrzędnych $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0,25$. Współczynnik θ na pewno jest znacznie mniejszy od 1, bo warunki dla nakładów zostały znacznie przesunięte w dół w stosunku do położenia przy $\theta = 1$ ⁵.

⁵ Znając współczynniki λ , współczynnik θ można obliczyć na podstawie odpowiedniego warunku dla nakładów. W tym przypadku jest to dolna przerywana prosta X_1 , gdyż wyznacza ona maksymalne przesunięcie obu warunków dla nakładów. Rozwiązujemy więc równanie $67,5(0) + 41,0(0,25) = 67,5\theta$. Otrzymujemy $\theta = 0,15$. Wprawdzie możliwe jest jeszcze równoległe przesuwanie prostej X_2 proporcjonalnie do spadku współczynnika θ , poniżej wartości 0,15, jednak wtedy jednocześnie przesuwana prosta X_1 wyjdzie poza zbiór rozwiązań dopuszczalnych, co nie jest akceptowalne.

Dołączmy teraz jeszcze jeden warunek, powiedzmy dotyczący rezultatu Y_1 (odpowiada to wariantowi E). Zadanie decyzyjne przyjmuje postać:

$$\begin{array}{ll}
 (FC) & \theta \rightarrow \min \\
 (Y_1) & 55,4\lambda_1 + 50,9\lambda_5 \geq 132,5 \text{ (nowy warunek ograniczający)} \\
 (Y_2) & 132,5\lambda_1 + 33,6\lambda_5 \geq 132,5 \\
 (X_1) & 67,5\lambda_1 + 41,0\lambda_5 \leq 67,5\theta \\
 (X_2) & 35,2\lambda_1 + 37,5\lambda_5 \leq 35,2\theta \\
 (\text{theta}) & \theta \leq 1 \\
 (\text{znaki}) & \lambda_1, \lambda_5, \theta \geq 0
 \end{array}$$

Wykr. 2. GRAFICZNA ILUSTRACJA ZADANIA (X_1 , X_2 , Y_2)



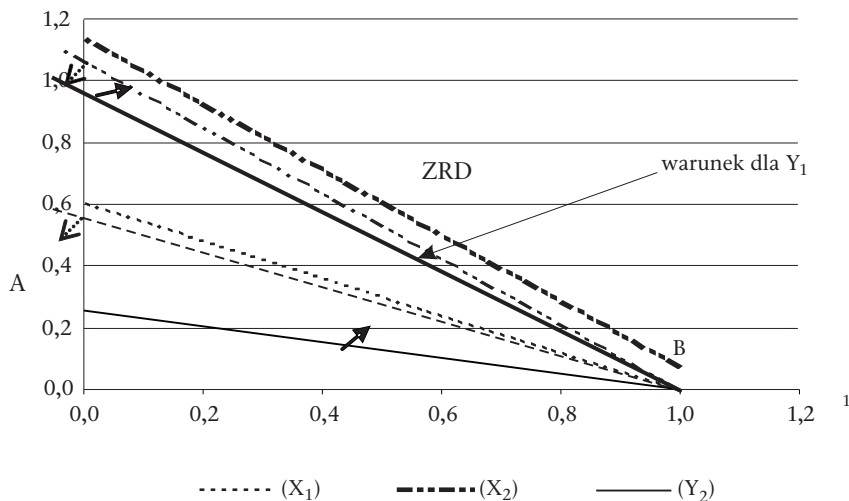
Źródło: obliczenia własne

Ilustracją tego zadania jest wyk. 3. W stosunku do wyk. 2 pojawił się nowy warunek dla rezultatów, mianowicie warunek Y_1 , który odcina z poprzedniego zbioru rozwiązań dopuszczalnych dość spory obszar poniżej warunku Y_1 .

Odrzucony obszar zawiera poprzednie rozwiązanie optymalne (punkt A) i dlatego obecne rozwiązanie optymalne musi być gorsze od poprzedniego, a więc minimalizowane optymalne θ musi być większe⁶. Punktem, do którego można najdalej przesunąć izokwanty jest punkt B. Obecnie rozwiązaniem optymalnym jest $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ i w ślad za tym optymalne $\theta = 1$.

⁶ Jak widać z wykresu 3, punktem, do którego można najdalej przesunąć izokwanty jest punkt B. Tak więc optymalne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ i w ślad za tym optymalne $\theta = 1$.

Wykr. 3. GRAFICZNA ILUSTRACJA ZADANIA (Y_1, Y_2, X_1, X_2)



Źródło: obliczenia własne

Wnioski ogólne

1. *Poprawa efektywności.* W standardowym modelu CCR wraz ze wzrostem liczby rezultatów lub (i) nakładów:
 - a) efektywność obiektu nieefektywnego się nie pogarsza, a więc może tylko wzrosnąć,
 - b) efektywność obiektu efektywnego się nie zmienia, zatem obiekt dotychczas efektywny takim pozostaje.
2. *Selektywność modelu CCR.* Model CCR jest bardzo selektywny w tym sensie, że jego wyniki są bardzo zróżnicowane, przy niewielkiej liczbie nakładów oraz rezultatów. Jednocześnie jest on mało selektywny przy większej liczbie nakładów i rezultatów. Zmniejszenie selektywności modelu odbywa się poprzez wzrost efektywności obiektów, spowodowany wzrostem liczby nakładów lub (i) rezultatów.
3. *„Sztuczny” wzrost efektywności.* Wynikający ze wzrostu liczby nakładów lub (i) rezultatów wzrost efektywności może wydawać się sztuczny, bowiem nie wynika z poprawy relacji między nakładami a rezultatami, lecz z zawężenia zbioru rozwiązań dopuszczalnych⁷.

⁷ W literaturze DEA niekiedy przytacza się postulat $J \geq \max(NR, 3(N+R))$, gdzie: J — liczba obiektów, N — liczba nakładów, R — liczba rezultatów, zob. np. Emrouznejad, Amin (2009). Warunek ten ustalono na drodze badań symulacyjnych, kierując się stabilizacją efektywności.

TABL. 3. EFEKTYWNOŚĆ PRZY RÓŻNEJ LICZBIE OBIEKTÓW

Nr wariantu	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
Obiekty	1—3	1—4	1—5	1—6	1—7	1—8	1—9	1—10	1—11	1—12	1—13	1—14	1—15	1—16
Liczba obiektów	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Obiekt <i>o</i>	efektywność obiektu <i>o</i> -tego w danym wariancie liczby obiektów													
<i>W1</i>	0,785	0,783	0,783	0,783	0,783	0,614	0,614	0,614	0,614	0,614	0,614	0,543	0,543	0,543
<i>W2</i>	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,783	0,783	0,783	0,783	0,783	0,783	0,692	0,692	0,692
<i>W3</i>	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,646	0,646	0,646	0,646	0,646	0,646	0,646	0,646	0,646
<i>W4</i>	×	1,000	1,000	1,000	1,000	0,927	0,927	0,927	0,927	0,921	0,921	0,784	0,784	0,784
<i>W5</i>	×	×	0,826	0,826	0,826	0,530	0,530	0,530	0,530	0,530	0,530	0,521	0,521	0,521
<i>W6</i>	×	×	×	1,000	1,000	0,697	0,697	0,697	0,697	0,687	0,687	0,550	0,550	0,550
<i>W7</i>	×	×	×	×	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
<i>W8</i>	×	×	×	×	×	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
<i>W9</i>	×	×	×	×	×	×	0,963	0,963	0,963	0,963	0,963	0,851	0,851	0,851
<i>W10</i>	×	×	×	×	×	×	×	0,578	0,578	0,578	0,578	0,511	0,511	0,511
<i>W11</i>	×	×	×	×	×	×	×	×	0,570	0,570	0,570	0,504	0,504	0,504
<i>W12</i>	×	×	×	×	×	×	×	×	×	1,000	1,000	0,731	0,731	0,731
<i>W13</i>	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0,799	0,707	0,707	0,707
<i>W14</i>	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	1,000	1,000	1,000
<i>W15</i>	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0,910	0,910
<i>W16</i>	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0,601
Minimum	0,785	0,783	0,783	0,783	0,783	0,530	0,530	0,530	0,530	0,530	0,530	0,504	0,504	0,504
Średnia	0,928	0,946	0,922	0,935	0,944	0,775	0,796	0,774	0,754	0,774	0,776	0,717	0,730	0,722
Odchylenie standardowe	0,124	0,109	0,108	0,102	0,096	0,182	0,182	0,185	0,186	0,191	0,183	0,187	0,187	0,183
Liczba obiektów 100% efektywnych	2	3	3	4	5	2	2	2	2	3	3	3	3	3

Źródło: obliczenia własne.

4. *Redundancja obiektów efektywnych*. Jeśli liczba nakładów i rezultatów jest duża, to posługując się modelem CCR należy liczyć się ze zjawiskiem *redundancji* obiektów w pełni efektywnych. Na przykład 50% lub więcej obiektów będzie miało efektywność równą 1. Trzeba więc zachować umiar w rozszerzaniu listy nakładów/rezultatów.
5. *Zmiana wag intensywności*. Jest zrozumiałe, że w ślad za zmianą liczby nakładów/rezultatów wywołaną zmianą współczynników efektywności θ , zmieniać się mogą (i na ogół zmieniają się) wagi intensywności λ . W przypadku obiektów nieefektywnych oznacza to zmianę znaczenia poszczególnych składowych jego kombinacji optymalnej, czyli zmianę znaczenia poszczególnych, w pełni efektywnych obiektów wzorcowych (benchmarków).
6. *Analogia do równań regresji*. Jak wiadomo wzrost liczby zmiennych objaśniających w liniowym równaniu regresji na ogół wywołuje wzrost współczynnika determinacji. Podobne zjawisko, wzrost wskaźnika efektywności, ma też miejsce w modelu CCR.

WSKAŹNIK EFEKTYWNOŚCI A ZMIANA LICZBY OBIEKTÓW

Przykład

W tabl. 3, na podstawie danych z tabl. 1, podano wskaźniki efektywności modelu CCR dla coraz to *szerszego zbioru obiektów*. *Początkowy zbiór zawiera trzy pierwsze obiekty ($W1$, $W2$, $W3$)*. Każdy następny jest rozszerzeniem poprzedniego o jeden obiekt — odpowiednio $W4$, potem $W5$ itd.⁸. Posłużono się modelem CCR dotyczącym listy nakładów/wyników wariantu E naszego przykładowego zadania (dwa nakłady — Y_1 i Y_2 oraz dwa rezultaty — X_1 i X_2).

Na podstawie tabl. 3 można sformułować empiryczne wnioski:

- dołączenie nowego obiektu, o ile nie jest to obiekt w pełni efektywny, nie zmienia wskaźnika efektywności już uwzględnionego obiektu (por. warianty VII do IX);
- jeśli dołączony obiekt okazuje się w pełni efektywny, efektywność dotychczas ujętych obiektów spada lub — co najwyżej — pozostaje na poprzednim poziomie (por. warianty IV—VI);
- liczba obiektów w pełni efektywnych ulega fluktuacjom w miarę zwiększania ogólnej liczby obiektów.

Podaną w tabl. 3 efektywność kilku obiektów ($W1$, $W2$, $W4$, $W6$, $W7$) w miarę sekwencyjnego rozszerzania liczby obiektów (oznaczoną na osi poziomej) zilustrowano na wyk. 4.

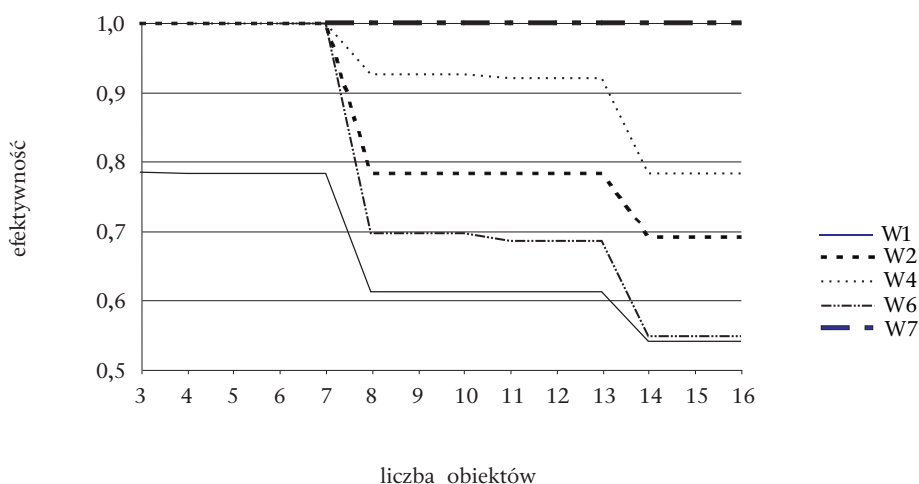
Spośród przedstawionych obiektów najbardziej radykalnie zmniejszyła się efektywność obiektu $W6$. Z poziomu 100% w gronie obiektów $W1$ — $W6$ spadła

⁸ Oczywiście na podstawie tabl. 1 utworzyć można wiele innych sekwencji rozszerzającego się zbioru obiektów.

ona do 55% w zbiorze wszystkich obiektów. Stabilną i w dodatku 100% efektywnością charakteryzował się obiekt *W7*.

Przedstawione wnioski empiryczne są ogólne.

Wykr. 4. EFEKTYWNOŚĆ OBIEKTU A LICZBA OBIEKTÓW



Źródło: obliczenia własne.

W standardowym modelu CCR rozszerzenie zbioru obiektów nie poprawia efektywności obiektów już uwzględnionych (efektywność spada lub pozostaje na poprzednim poziomie), a zawężenie listy obiektów nie pogarsza efektywności obiektów dotychczasowych.

Intuicyjnie wydaje się, że dowód tego twierdzenia może mieć charakter bardzo ogólny, np.:

- jeśli wprowadzany obiekt jest nieefektywny, to żaden inny obiekt nie będzie się na nim wzorował⁹, a więc — w odniesieniu do już uwzględnionych obiektów — sytuacja nie ulega zmianie. Dlatego też zachowane zostaje poprzednie rozwiązanie, a efektywność „starych” obiektów nie zmienia się;
- jeśli natomiast „nowy” obiekt okaże się w pełni efektywny, efektywność „starego” obiektu:

⁹ Obiekt *o*-ty wzoruje się na obiekcie *j*-tym, gdy $\lambda_{oj} > 0$.

- a) nie zmieni się, jeśli w nowym rozwiązaniu nie będzie się on wzorował na obiekcie wprowadzanym,
- b) spadnie, jeśli w nowym rozwiązaniu będzie się wzorował na obiekcie wprowadzanym; w szczególności obiekt dotychczas w pełni efektywny może stać się nieefektywny.

Dla bardziej konkretnego uzasadnienia przedstawimy inny dowód. Jest on oparty na własnościach zadania dualnego.

Jak wiadomo, dla każdego zadania programowania liniowego, zwanego zadaniem pierwotnym, sformułować można według ściśle określonych reguł inne zadanie programowania liniowego, zwane zadaniem dualnym. Trzy własności zadań dualnych będą ważne dla zapowiadanego dowodu:

- a) *wymiar zadania*; w zadaniu dualnym jest tyle warunków, ile jest zmiennych w zadaniu pierwotnym i tyle zmiennych, ile jest warunków w zadaniu pierwotnym;
- b) *optymalna funkcja celu*; wartości funkcji celu w rozwiązaniach optymalnych (o ile one istnieją) obu zadań są takie same;
- c) *zmiana kierunku preferencji*; w zadaniu dualnym zmienia się kierunek preferencji. Np. jeśli zadanie pierwotne jest na minimum, to zadanie dualne jest na maksimum¹⁰.

Kontynuujemy dowód twierdzenia:

- zwiększenie liczby obiektów w zadaniu CCR oznacza wzrost liczby zmiennych decyzyjnych tego zadania, bo z każdym obiektem związana jest jego „własna” waga intensywności λ_{oj} . Oznacza to wzrost liczby warunków w zadaniu dualnym;
- zadanie dualne jest też zadaniem programowania liniowego, czyli wzrost liczby jego warunków nie polepszy optymalnej wartości funkcji celu zadania dualnego;
- zadanie CCR jest na minimum i dlatego zadanie do niego dualne jest zadaniem na maksimum. Wobec tego wzrost liczby warunków zadania dualnego spowoduje, iż pogarszająca się optymalna wartość funkcji celu zadania dualnego będzie nie większa od poprzedniej (mniejsza lub równa);
- w obu zadaniach optymalne wartości funkcji celu są równe, zatem w ślad za spadkiem (lub stabilizacją) optymalnej wartości funkcji celu zadania dualnego idzie spadek (lub stabilizacja) optymalnej wartości funkcji celu zadania CCR, czyli spadek lub stabilizacja wskaźnika efektywności θ ;
- to ostatnie oznacza, że wzrost liczby obiektów w standardowym zadaniu CCR powoduje, iż optymalna wartość θ_0 (funkcji celu zadania CCR) nie rośnie — maleje lub pozostaje bez zmian. Natomiast spadek liczby obiektów powoduje, że optymalna wartość θ_0 nie maleje (rośnie lub pozostaje bez zmian).

¹⁰ Np. Czerwiński (1972), s. 154 i nast.; Jurek (2000), s. 203.

Podobny dowód można przeprowadzić dla zadania ukierunkowanego na rezultaty.

Wnioski ogólne

1. *Nowy obiekt nie polepsza efektywności.* W standardowym modelu CCR wprowadzenie nowego obiektu nie polepsza wskaźnika efektywności θ obiektu już uwzględnianego. Nowy wskaźnik efektywności dla dotychczas rozpatrywanego obiektu może tylko zmaleć lub pozostać bez zmian.
2. *Obiekt nieefektywny nic nie zmienia.* Efektywność już rozpatrywanych obiektów nie ulegnie zmianie, gdy obiekt wprowadzany okaże się nieefektywny. W szczególności obiekty do tej pory efektywne takimi pozostają, podobnie nadal nieefektywne będą obiekty do tej pory nieefektywne.
3. *Zmiany mogą nastąpić, gdy nowy obiekt jest w pełni efektywny.* Jeśli obiekt wprowadzany okaże się w pełni efektywny, efektywność dotychczas badanych obiektów (wszystkich lub niektórych) może się zmniejszyć. Obiekt dotychczas w pełni efektywny może takim pozostać, może też stać się nieefektywny. Z kolei obiekt do tej pory nieefektywny nadal pozostaje nieefektywny.
4. *Porównanie z równaniami regresji.* Inaczej niż w statystyce i ekonometrii, gdzie trudno rozstrzygnąć, czy zwiększenie liczby obserwacji spowoduje zmniejszenie czy też zwiększenie współczynnika determinacji, w przypadku modelu CCR sytuacja jest prosta — zwiększenie liczby obiektów wywoła pogorszenie lub co najwyżej brak zmian efektywności¹¹.

WIELKOŚCI ORYGINALNE A WSKAŹNIKI NATĘŻENIA

Rozpatrywana tematyka nie dotyczy zmian wskaźnika efektywności na skutek zmian rozmiaru zadania, lecz na skutek zmian charakteru danych.

Przeprowadzając badania empiryczne, zwłaszcza w odniesieniu do obiektów przestrzennych (krajów, województw, regionów itp.), niekiedy staje się przed pytaniem, czy reprezentować nakłady/rezultaty jednostkami naturalnymi, np. mln zł, tys. osób czy też wskaźnikami natężenia, np. wielkością nakładu/rezultatu na 10 tys. ludności lub np. na km². W pewnych kontekstach bardziej uzasadnione wydają się wielkości oryginalne, w innych — wskaźniki natężenia. Przykładowo, w problemie rozpatrywanym w poprzednich częściach artykułu badano nakłady i rezultaty, które były wskaźnikami natężenia, co pozwalało abstrahować od wielkości obiektu (były to województwa). Sprawdźmy, czy podobne wyniki uzyskamy dla wielkości globalnych.

¹¹ Dodajmy jednak, że istnieje analogia odnośnie do sumy kwadratów reszt. W wyznaczanym klasyczną MNK modelu regresji liniowej konsekwencją dołączenia nowej obserwacji jest wzrost lub brak zmian sumy kwadratów reszt.

Przykład

W pierwszej części tabl. 4 przytoczono wyniki dla podanego w tabl. 1 układu dwóch rezultatów i trzech nakładów reprezentowanych przez wskaźniki natężenia. Natomiast w drugiej części podano wyniki modelu CCR, gdy nakłady i rezultaty są „globalne”. Uzyskano je przez przemnożenie wskaźników natężenia przez liczbę ludności w danym województwie.

Niektóre wnioski empiryczne mają postać:

- efektywność obliczona na podstawie danych w postaci wskaźników natężenia niekiedy różni się znacznie od uzyskanej dla przypadku danych globalnych, niekiedy natomiast jest identyczna;
- w szczególności może zmieniać się lista obiektów w pełni efektywnych;
- w analizowanym przykładzie, po przejściu na dane globalne, efektywność nie malała, a jeśli wzrastała, to w taki sposób, że obiekt bardzo często stawał się efektywny¹²;
- ogólnie trudno przesądzać, jaki jest kierunek zmian współczynników efektywności po przejściu na dane globalne.

W tabl. 4 podano także sumy współczynników λ dla danego wiersza. Sumy te:

$$L_o = \sum_{j=1}^J \lambda_{oj} \quad (6)$$

wykorzystuje się w DEA jako wskaźniki niekorzyści skali obiektów. Przyjmuje się mianowicie, że jeśli:

- a) $L_o = 1$, to w obiekcie o -tym występują stałe korzyści skali (skala obiektu jest „dobra”),
- b) $L_o > 1$, to w obiekcie o -tym występują niekorzyści dużej skali (obiekt jest „za duży”),
- c) $L_o < 1$, to w obiekcie o -tym występują niekorzyści małej skali (obiekt jest „za mały”).

Różnice między wskaźnikami niekorzyści skali L_o dla obu rodzajów danych scharakteryzowano na wyk. 5.

W przypadku danych globalnych, wskaźniki niekorzyści skali obiektu nieefektywnego (L_o) zazwyczaj bardziej odbiegają od wartości 1, oznaczającej stałe korzyści skali, niż w wypadku danych w postaci wskaźników natężenia. Na przykład dla obiektu *W1* suma optymalnych wag intensywności w przypadku danych w postaci wskaźników natężenia wyniosła 0,956, co sugeruje minimalne niekorzyści małej skali. Natomiast dla danych globalnych wyniosła ona 1,938, co sugeruje bardzo wyraźne niekorzyści dużej skali.

¹² Jedyny przypadek wzrostu efektywności bez osiągnięcia wartości 1 dotyczy obiektu *W11*.

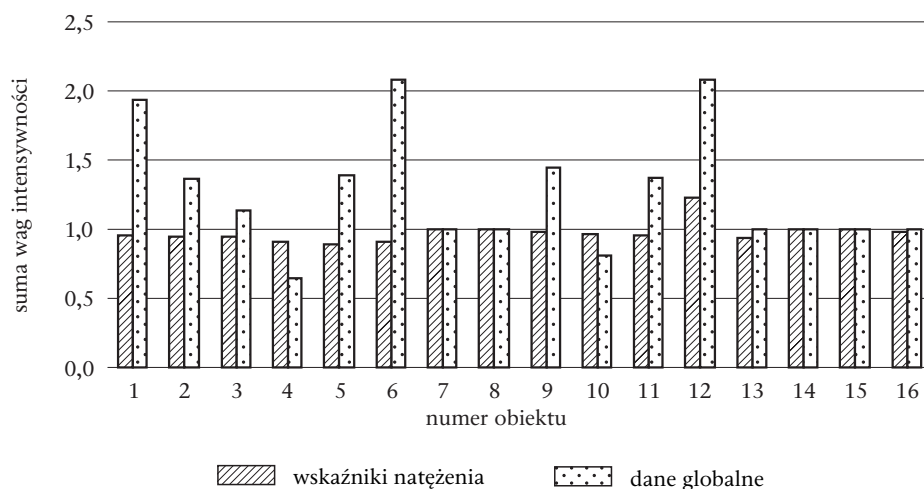
TABL. 4. WYNIKI MODELU CCR

Obiekt o	Efektyw- ność ^a	Optymalne współczynniki $\hat{\lambda}_{oj}$				Efektyw- ność ^b	Optymalne współczynniki λ_{oj}						
		λ_{o7}	λ_{o14}	$\hat{\lambda}_{o15}$	L_o		$\hat{\lambda}_{o6}$	λ_{o7}	λ_{o13}	λ_{o14}	$\hat{\lambda}_{o15}$	$\hat{\lambda}_{o16}$	L_o
1	0,783	0	0,956	0	0,956	0,783	0	0	0	1,938	0	0	1,938
2	0,923	0	0,941	0	0,941	0,923	0	0	0	1,362	0	0	1,362
3	0,790	0,285	0,665	0	0,950	0,790	0,121	0	0	1,018	0	0	1,139
4	0,840	0	0,910	0	0,910	0,840	0	0	0	0,643	0	0	0,643
5	0,627	0,176	0,715	0	0,891	0,627	0,089	0	0	1,298	0	0	1,387
6	0,660	0	0,913	0	0,913	0,660	0	0	0	2,082	0	0	2,082
7	1	1	0,000	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
8	1	0	0,000	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
9	0,862	0	0,983	0	0,983	0,862	0	0	0	1,444	0	0	1,444
10	0,853	0	0,964	0	0,964	0,853	0	0	0	0,812	0	0	0,812
11	0,886	0	0,953	0	0,953	0,897	0	0	0	0,828	0	0,547	1,375
12	0,989	0	0,207	1,003	1,230	0,989	0	0	0	0,681	1,404	0	2,085
13	0,840	0	0,940	0	0,940	1	0	0	1	0	0	0	1
14	1	0	1,000	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
15	1	0	0,000	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
16	0,972	0	0,980	0	0,980	1	0	0	0	0	0	1	1

^a Dla wskaźników natężenia. ^b Dla wielkości globalnych.

Źródło: obliczenia własne.

Wykr. 5. WSKAŹNIKI NIEKORZYŚCI SKALI



Źródło: obliczenia własne

Wnioski ogólne

1. *Niekorzyści skali w analizach przestrzennych.* Ostatni wniosek empiryczny sugeruje, że badania korzyści skali, prowadzone w analizach przestrzennych na podstawie wielkości globalnych, wskazywać mogą na większe zróżnicowanie korzyści/niekorzyści skali niż w przypadku wskaźników natężenia.
2. *Zróżnicowanie danych przekształconych.* Podana sugestia intuicyjnie wydaje się uzasadniona. W analizach przestrzennych wskaźniki natężenia zwykle są mniej zróżnicowane niż wielkości globalne. W ślad za tym obiekty charakteryzują się bardziej zbliżoną wielkością nakładów/rezultatów i wskaźnik niekorzyści skali, jakim jest suma współczynników λ , częściej będzie kształtował się w okolicy 1. Gdy nakłady oraz rezultaty wyrażają się liczbami globalnymi, współczynniki λ na ogół będą bardziej zróżnicowane, bo globalna wielkość obiektów na ogół jest bardziej zróżnicowana. Dlatego sumy wag intensywności mogą znacznie różnić się od 1, a to oznacza zachodzenie wyrażnych (istotnych) niekorzyści małej skali lub niekorzyści dużej skali.

Przejście na inny układ wielkości, np. zastąpienie wielkości oryginalnych wskaźnikami natężenia lub wskaźnikami dynamiki, może zmienić wskaźniki efektywności oraz wagi intensywności i wskaźniki korzyści skali.

LITERATURA

- Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E. (1978), *Measuring efficiency of decision making units*, „European Journal of Operational Research”, nr 2
- Charnes A., Cooper W. W., Tone K. (2006), *Introduction to Data Envelopment Analysis and its Uses with DEA-Solver Software and References*, Springer
- Czerwiński Z. (1972), *Matematyka na usługach ekonomii*, PWE, Warszawa, wyd. III
- Emrouznejad A., Amin G. R. (2009), *DEA models for ratio data: Convexity consideration*, Applied Mathematical Modelling, nr 33
- Guzik B. (2009), *Model CCR a niektóre własności materiału empirycznego*, „Wiadomości Statystyczne”, nr 1
- Jurek W. (2000), *Dualność*, [w:] *Ekonometria i badania operacyjne. Zagadnienia podstawowe* (praca zbiorowa), Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, wyd. III

SUMMARY

Changes of efficiency object indices were discussed in the CCR-DEA (Data Envelopment Analysis) model by various function sizes. It was proved that the increase of the outlay/result quantity causes increase or stability of efficiency indices and an increase of the object quantity results in decrease or stability of efficiency indices. The characteristics are important in projecting analysis depth by DEA methods. Decrease or increase of the efficiency index can be caused by formal factors and can not result from economic efficiency of objects only. Similar problems can be met in other approaches to quantity analysis, e.g. in statistical (econometric) regression models.

РЕЗЮМЕ

Статья рассматривает вопрос изменений показателей эффективности объектов в модели CCR-DEA (Data Envelopment Analysis), когда размеры заданий изменяются. Было доказано, что рост числа затрат/результатов вызывает рост или стабилизацию показателей эффективности.

В статье указано на то, что об этих свойствах следует помнить при проектировании глубины анализа методами DEA. Падение или рост показателя эффективности может иметь чисто формальную причину и необязательно должно быть результатом роста экономической способности объектов. Такого типа проблемы можно встретить также в других подходах к количественному анализу, например, в статистических (эконометрических) моделях регрессии.